

Exercice 1 logique formelle

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes et nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés quantifiés:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est injective.
4. Pour tout $\alpha \geq 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}^*$ tel que $0 \leq q \leq \alpha$.
5. L'application f est surjective.
6. L'application f est bijective.

Exercice 2 logique formelle

Dans la salle de **Sciences de l'Ingénieur 1** à l'ENSPD, on trouve deux sortes d'étudiants: les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours. Cinq étudiants disent dans l'ordre:

- Je suis sincère.
- Au moins 3 d'entre nous sont sincères.
- Le premier étudiant est menteur.
- Au moins trois d'entre nous sont menteurs.
- Nous sommes tous menteurs

Déterminer en utilisant le **principe du tiers exclu** de la logique formelle (**principe Aristotélicien**)

Combien d'étudiants sont sincères?

Le **principe du tiers exclu** énonce qu'ou bien une proposition est vraie ou bien sa négation est vraie

Exercice 3 arithmétique

Au marché de PK21, un grumier écrase le panier d'œufs d'une fermière. Le chauffeur grumier propose de rembourser les dégâts et demande combien d'œufs contenait le panier. La femme se souvient seulement qu'il en restait toujours un quand elle les sortait deux par deux, et de même par groupes de trois, quatre, cinq ou six, mais qu'il n'en restait aucun quand elle les sortait sept par sept. Combien avait-elle d'œufs au minimum?

Exercice 4 application et arithmétique

Soit l'application f définie comme suit:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto f(x) = x + (-1)^x$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Calculer $(f \circ f)(x)$.
4. Montrer que $\forall n, n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leq n!$
5. Montrer que $\forall n, n \in \mathbb{N}, (4^n + 6n - 1)$ est un multiple de 9.

Exercice 5 Ensemble, application et relation

Soit $f: E \rightarrow F$ une application; A, C des sous-ensembles de E et B un sous-ensemble de F . Montrer les propriétés suivantes:

1. Montrer que $A \cap C = A \cup B$ si et seulement si $B \subset A \subset C$.
2. $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$
3. f est injective $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$
4. f est surjective $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$
5. f est bijective $\Leftrightarrow f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$
6. On appelle différence symétrique de A et B notée $A \Delta B$, le sous-ensemble de E :

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B; x \notin A \cap B\}.$$

a. Interpréter les éléments de $A \Delta B$

b. Montrer que $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

7. Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation R par: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tel que $y \neq \pm 1$, $xRy \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{-1 + y^2} = 1$. Montrer que R est une relation d'équivalence et déterminer classe d'équivalence de b noté $Cl(b)$